

非线性振动方程的格林函数解^{*}

孙国耀, 黄耀本

(中山大学物理学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 格林函数在电动力学用得较多。用格林函数解非线性振动方程, 并与逐步近似解法进行比较。逐步近似解法近似太多, 格林函数解严格。

关键词: 格林函数; 非线性振动方程; 电动力学

中图分类号: O322; O442 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) S2-0165-03

1 格林函数在电动力学的应用

格林函数在电动力学用得较多。为了在力学中引用格林函数, 我们要把任何与时间有关的力都表示为诸冲力之和。

冲力是一种持续时间极短的力。根据动量定理

$$\int_{t_1}^{t_1+\Delta t} F(t) dt = P_2 - P_1$$

在暂短时间间隔 Δt 内, 使质点动量改变为 1 个单位, 即 $P_2 - P_1 = 1$ 的力称为单位冲力。

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t) dt = 1$$

最简单的冲力是恒力冲力, 持续作用 Δt 时间间隔的恒力单位冲力的大小为

$$F = \frac{1}{\Delta t}$$

我们用符号 $P_0 \delta(t-a)$ 来表示给与粒子动量为 P_0 的恒冲力, 这是在时刻 $t=a$ 作用于质点上并持续 Δt 时间间隔的力 (见图 1)。

对于图 2 所示的任意冲力, 可以用正态分布曲线来表示

$$F = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta t} \exp\left[-\frac{(t-a)^2}{(\Delta t)^2}\right]$$

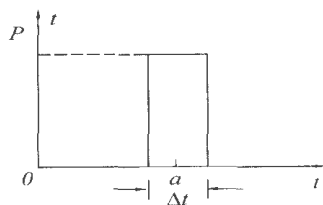


图 1 恒力冲力

Fig 1 Constant impulse

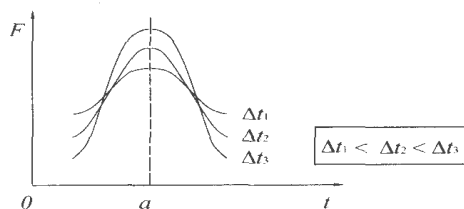


图 2 任意冲力

Fig 2 Arbitrary impulse

曲线下的面积都等于 1, 它对积分的主要贡献来自区域 $\left[a - \frac{\Delta t}{2}, a + \frac{\Delta t}{2}\right]$ 。单位冲力理想化的极限情况是在 $t=a$ 点的值极大, 而在其他点的值为零。如果能够这样来描述一个冲力, 而且它给质点的动量是 P_0 , 我们用 $P_0 \delta(t-a)$ 来表示。 $\delta(t-a)$ 是理想的单位脉冲函数, 它定义为

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t-a) dt = \begin{cases} 1 & t_1 < a < t_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

和 $\delta(t-a) = 0 \quad t \neq a$

满足上述情况的函数 $\delta(t-a)$ 称为狄拉克 δ 函数。

单位冲力的重要性在于任何与时间有关的力都可以表示为诸单位冲力之和。例如图 3 所描述的力 $F(t)$ 在 t_1 和 t_2 之间的足够小的时间间隔 Δt 内, 连续变化的力可以认为是线性的。

该时间间隔的平均时间

$$\zeta_1 = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

所对应的 $F(t)$ 大小等于该时间间隔内 $F(t)$ 的平均值

$$F(\zeta_1) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$$

* 收稿日期: 2003-09-26

作者简介: 孙国耀 (1949 年生), 男, 副教授; E-mail: mnsly@zsu.edu.cn

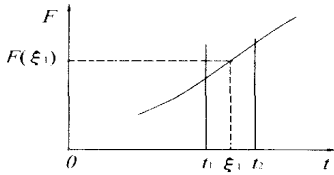


图 3 任意力作为一系列冲力之和

Fig. 3 Arbitrary force function as a sum of a series of impulses

对于小的 Δt 值, 力 $F(t)$ 对质点运动的改变近似认为是恒力 $F(\zeta_1)$ 在同样间隔内对质点运动所产生的效果。持续作用 Δt 的力可表示为 $F(\zeta_1) \Delta(t - \zeta_1) \Delta t$ 。将力 $F(t)$ 的作用时间间隔分成 N 个相等的小时间间隔 Δt , 则

$$F(t) = \sum_{n=1}^N F(\zeta_n) \Delta(t - \zeta_n) \Delta \zeta \quad (1)$$

其中, $\Delta(t - \zeta)$ 是上面所定义的在 $\Delta t = \Delta \zeta$ 间隔的恒定单位脉冲函数。在 Δt 或 $\Delta \zeta$ 趋于零的极限情况下, 有

$$F(t) = \int_{T_1}^{T_2} F(\zeta) \delta(t - \zeta) d\zeta \quad (2)$$

式中用 $\delta(t - \zeta)$ 代替了 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的 $\Delta(t - \zeta)$, T_1 和 T_2 分别是力对质点作用持续时间的起止限。

根据线性微分方程解所满足的叠加原理, 如令 $g(t, \zeta_n)$ 代表单位冲力 $\Delta(t - \zeta_n)$ 作用下运动方程的解, 则在力 $F(\zeta_n) \Delta(t - \zeta_n) \Delta \zeta$ 作用下, 运动方程的解是 $g(t, \zeta_n) F(\zeta_n) \Delta \zeta$, 对于方程(1)的力, 其解为

$$x(t) = \sum_{n=1}^N g(t, \zeta_n) F(\zeta_n) \Delta \zeta_n$$

式中 $g(t | \zeta)$ 是对应单位脉冲函数 $\delta(t - \zeta)$ 的运动方程的解, 称为格林函数。如果质点的质量为 m , 则格林函数为

$$G(t | \zeta) = mg(t | \zeta)$$

运动方程的解为

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_{T_1}^{T_2} G(t | \zeta) F(\zeta) d\zeta \quad (3)$$

2 格林函数解非线性振动方程

非线性振动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \alpha mx^2 - \beta mx^3$$

假定势能函数对平衡位置是对称的, 则 $\alpha = 0$ 。得

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = -\beta mx^3$$

把 $-\beta x^3$ 作为外力, 即 $F(t) = -\beta x^3(t)$ 代入

(2), (3) 式

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right] \frac{1}{m} \int_{T_1}^{T_2} G(t | \zeta) F(\zeta) d\zeta = \int_{T_1}^{T_2} F(\zeta) \delta(t - \zeta) d\zeta$$

其中, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ 。

得格林函数所满足的方程

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right] G(t | \zeta) = \delta(t - \zeta) \quad (4)$$

令 $\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right] = \left[\frac{d}{dt} + i\omega_0 \right] \left[\frac{d}{dt} - i\omega_0 \right]$

(4) 式可写成

$$\left[\frac{d}{dt} + i\omega_0 \right] \left[\frac{d}{dt} - i\omega_0 \right] G(t | \zeta) = \delta(t - \zeta)$$

作代换

$$y(t | \zeta) = \left[\frac{d}{dt} - i\omega_0 \right] G(t | \zeta)$$

得 $y(t | \zeta)$ 的一阶微分方程

$$\left[\frac{d}{dt} + i\omega_0 \right] y(t | \zeta) = \delta(t - \zeta)$$

利用积分因子 $\exp(i\omega_0 t)$, 上式化简为

$$\frac{d}{dt} [\exp(i\omega_0 t) y(t | \zeta)] = \exp(i\omega_0 t) \delta(t - \zeta)$$

解这微分方程得

$$y(t | \zeta) = \begin{cases} \exp(i\omega_0(t - \zeta)) & t > \zeta \\ 0 & t < \zeta \end{cases}$$

将 $y(t | \zeta)$ 代入, 得

$$\left[\frac{d}{dt} - i\omega_0 \right] G(t | \zeta) = \begin{cases} \exp(i\omega_0(\zeta - t)) & t > \zeta \\ 0 & t < \zeta \end{cases}$$

乘积分因子 $\exp(-i\omega_0 t)$, 可重写为

$$\frac{d}{dt} [\exp(-i\omega_0 t) G(t | \zeta)] = \begin{cases} \exp(-i\omega_0 t) \exp(i\omega_0(\zeta - t)) & t > \zeta \\ 0 & t < \zeta \end{cases}$$

解这方程得格林函数

$$G(t | \zeta) = \begin{cases} \frac{\sin \omega_0(t - \zeta)}{\omega_0} & t \geq \zeta \\ 0 & t \leq \zeta \end{cases} \quad (5)$$

则非线性振动方程的解

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_{T_1}^{T_2} G(t | \zeta) F(\zeta) d\zeta =$$

$$\frac{1}{m} \int_0^t F(\zeta) \frac{\sin \omega_0(t - \zeta)}{\omega_0} d\zeta \quad (6)$$

3 与逐次近似解法比较

非线性振动方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = -\beta mx^3$$

β 是小量, 它反映恢复力中非线性成分的大小。由于非线性项正比于 x^3 对正负是对称的, 谐波中不会出现偶次谐频的谐波, 因而谐波中最低项是三次的。如果我们对解的精度要求不高, 可设试探解为

$$x = A \cos \omega t + \eta A \cos 3 \omega t$$

式中 η 为比 1 小得多的小量。

由三角恒等式

$$\cos^3 \omega t = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3 \omega t$$

其中 $\omega = \omega_0 + \delta \omega_0 = (1 + \delta) \omega_0$
式中, $\delta \ll 1$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -A \omega^2 \cos \omega t - 9 \omega^2 \eta A \cos 3 \omega t$$

忽略二级以上小量

$$\begin{aligned} \omega^2 &= (1 + \delta)^2 \omega_0^2 \approx (1 + 2 \delta) \omega_0^2 \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -(1 + 2 \delta) \omega_0^2 A \cos \omega t - \\ &9(1 + 2 \delta) \omega_0^2 \eta A \cos 3 \omega t = \\ &-\omega_0^2 A \cos \omega t - 2 \delta \omega_0^2 A \cos \omega t - \\ &9 \omega_0^2 \eta A \cos 3 \omega t - 18 \delta \omega_0^2 \eta A \cos 3 \omega t \approx \\ &-\omega_0^2 A \cos \omega t - 2 \delta \omega_0^2 A \cos \omega t - 9 \omega_0^2 \eta A \cos 3 \omega t \\ \omega_0^2 x &= \omega_0^2 A \cos \omega t + \omega_0^2 \eta A \cos 3 \omega t \\ -\epsilon x^3 &= -\epsilon (A \cos \omega t + \eta A \cos 3 \omega t)^3 \approx \\ &-\epsilon A^3 \cos^3 \omega t = -\epsilon A^3 \left[\frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3 \omega t \right] \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} -2 \delta \omega_0^2 A \cos \omega t - 9 \omega_0^2 \eta A \cos 3 \omega t + \omega_0^2 \eta A \cos 3 \omega t = \\ -\frac{3}{4} \epsilon A^3 \cos \omega t - \frac{1}{4} \epsilon A^3 \cos 3 \omega t \end{aligned}$$

比较系数

$$-2 \delta \omega_0^2 A = -\frac{3}{4} \epsilon A^3 - 9 \omega_0^2 \eta A + \omega_0^2 \eta A = -\frac{1}{4} \epsilon A^2$$

得 $\delta = + \frac{3 \epsilon A^2}{8 \omega_0^2}, \eta = + \frac{\epsilon A^2}{32 \omega_0^2}$

所以角频率 $\omega = \omega_0 + \frac{3 \epsilon A^2}{8 \omega_0^2}$

方程的解 $x(t) = A \cos \omega t + \frac{\epsilon A^2}{32 \omega_0^2} \cos 3 \omega t$

用格林函数求解

$$x(t) = - \int \beta x^3(\zeta) \frac{\sin \omega_0(t - \zeta)}{\omega_0} d\zeta$$

作为一级近似 $x(\zeta) = A \cos \omega \zeta$

代入方程, 并利用三角恒等式

$$\begin{aligned} \sin \omega_0(t - \zeta) \cos^3 \omega t = \\ \sin \omega_0(t - \zeta) \times \left[\frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3 \omega t \right] = \\ \frac{3}{8} \{ \sin[\omega_0 t + (\omega - \omega_0) \zeta] + \\ \sin[\omega_0 t - (\omega - \omega_0) \zeta] \} + \\ \frac{1}{8} \{ \sin[3 \omega_0 t + (\omega - \omega_0) \zeta] + \\ \sin[\omega_0 t - (3 \omega - \omega_0) \zeta] \} \end{aligned}$$

积分, 得

$$\begin{aligned} x(t) = - \frac{3 \beta A^3}{8 \omega_0} \left(\frac{\cos \omega t}{\omega_0 - \omega} + \frac{\cos \omega t}{\omega_0 + \omega} \right) - \\ \frac{\beta A^3}{8 \omega_0} \left(\frac{\cos 3 \omega t}{\omega_0 - 3 \omega} + \frac{\cos 3 \omega t}{\omega_0 + 3 \omega} \right) \end{aligned}$$

或

$$x(t) = - \frac{3 \beta A^3}{4(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t - \frac{\beta A^3}{4(\omega_0^2 - 9 \omega^2)} \cos 3 \omega t$$

因为

$$\omega = (1 + \delta) \omega_0$$

则

$$\begin{aligned} x(t) = - \frac{3 \beta A^3}{4[\omega_0^2 - (1 + 2 \delta) \omega^2]} \cos \omega t - \\ \frac{\beta A^3}{4[\omega_0^2 - 9(1 + 2 \delta) \omega^2]} \cos 3 \omega t \approx \\ A \cos \omega t + \frac{\epsilon A^3}{32 \omega_0^2} \cos 3 \omega t \end{aligned}$$

与逐次近似解法的结果一致。如果把近似解的右边代入 (6) 式, 便得到方程下一级近似解。

4 讨 论

格林函数解非线性振动方程实际上是解积分方程(6)。逐次近似解非线性振动方程要作忽略高次项, 而格林函数解比它严格。最重要的是格林函数还可以求下一级近似解, 这是逐次近似无法做到的。

参考文献:

[1] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 北京: 人民出版社, 1979.
[2] HAUSER W. Introduction to principles of mechanic, 1978.

A Solution of Nonlinear Oscillation with the Method of Greed's Function

SUN Guo yao, HUANG Nai ben

(Department of Physics, Sun Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A solution of nonlinear hamonic oscillation with the method of Green's runction was pointed out.

Key words: Green's function; nonlinear hamonic os cillation; electrodynamics